Aula 15

Teorema de Lumer-Phillips

O Teorema de Hille-Yosida oferece uma caracterização dos geradores de C_0-semigrupos das contrações. Nesta aula nós discutimos outra caracterização destes geradores.

Def 1 Sejam E um esp. de Banach e E^* o dual dele. Para $x \in E$ definimos o conjunto de dualidade $F(x)$ por: $F(x) = \{ x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \}$

Observação Do Teorema de Hahn-Banach segue que $F(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in E$.

Ex 1 a) Seja E um esp. de Hilb. com produto escalar $(\cdot,\cdot)$. Pelo Teorema de Riesz $\forall y^* \in E^*$ $\exists!\, y \in E$ tal que $\langle x, y^* \rangle = (x, y)$ e $\|y\| = \|y^*\|$. Assim, $y^* \in F(x)$ significa $\|x\| = \|y^*\| = \|y\|$ e $\langle x, y^* \rangle = (x, y) = \|x\|^2 = \|x\| \cdot \|y\|$.

Logo $y = \alpha x$, $|\alpha| = 1$ $\Rightarrow$ $(x, y) = \bar{\alpha} \|x\|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow$ $\alpha = 1 \Rightarrow x = y$. Logo $F(x) = \{ \varphi_x \}$, onde $\varphi_x(z) = (z, x)$.

b) Seja $E = L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ $\Rightarrow$ com E^* identificamos $L^{p'}(\mathbb{R})$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ $(1' = \infty)$. Definimos

$$g = \|f\|_p^{2-p} \, \bar{f} \, |f|^{p-2}$$

- Se $p = 1 \Rightarrow \|g\|_\infty = \|f\|_1$
- Se $p > 1 \Rightarrow \|g\|_{p'} = \|f\|_p^{2-p} \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^{(p-1) \cdot \overbrace{\frac{p}{p-1}}^{p'}} \, dx \Big) =$

$= \|f\|_p^{2-p} \, \|f\|_p^{p-1} = \|f\|_p$. ②

Do outro lado $\langle f, g\rangle = \|f\|_p^{2-p} \int_{\mathbb{R}} f \cdot \bar{f} \, |f|^{p-2} dx =$

$= \|f\|_p^{2-p} \cdot \|f\|_p^{p} = \|f\|_p^{2}$.

Logo $g \in F(f)$, e observe que $g = \bar{f}$ para $p=2$.

c) Seja $E = C_0(\mathbb{R})$ e $f \in E \Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$\|f\|_E = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)| = |f(x_0)|$.

Definimos $\varphi(g) = \overline{f(x_0)}\, g(x_0)$, $g \in E \Rightarrow \varphi \in E^*$

(De fato, $|\varphi(g)| = |\bar{f}(x_0) g(x_0)| \le |f(x_0)| \cdot \|g\| = C\|g\|$)

E' facil ver que $\|\varphi\| \le |f(x_0)|$, mas como

$\varphi(f) = |f(x_0)|^2 = |f(x_0)|\,\|f\| \Rightarrow \|\varphi\| = |f(x_0)|$

Finalmente $\begin{cases} \varphi(f) = \|f\|_E^2 \\ \|\varphi\| = \|f\|_E \end{cases} \Rightarrow \varphi \in F(f)$.

Def 2 Operador A é dissipativo se $\forall\, x \in D(A)\ \exists\, x^* \in F(x)$ tal que $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \le 0$.

Lema 1 A é dissipativo sse $\|(\lambda - A)x\| \ge \lambda \|x\|$ para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$.

Demonstração ($\Rightarrow$) Sejam $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$. Se $x^* \in F(x)$ e $\operatorname{Re}\langle Ax, x^*\rangle \le 0 \Rightarrow$

$\|\lambda x - Ax\|\,\|x\| \ge |\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle| \ge \operatorname{Re}\langle \lambda x - Ax, x^*\rangle \ge \lambda \|x\|^2$

$\Rightarrow \|(\lambda - A)x\| \ge \lambda \|x\|$.

($\Leftarrow$) Seja $x \in D(A)$ e assume que $\lambda\|x\| \le \|(\lambda - A)x\|$ $\forall\, \lambda > 0$. Se $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ e $z_\lambda^* = \dfrac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|} \Rightarrow$

$\|z_\lambda^*\| = 1$ e

$\lambda\|x\| \le \|\lambda x - Ax\| = \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^*\rangle =$

$= \lambda \underbrace{Re < x, z_\lambda^* >}_{\leq \|x\| \|z_\lambda^*\| = \|x\|} - Re < Ax, z_\lambda^* > \leq \lambda \|x\| - Re < Ax, z_\lambda^* >$ ③ $\forall \lambda > 0$

Logo $Re < Ax, z_\lambda^* > \leq 0$ (1) e $Re < x, z_\lambda^* > \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\|$ (2)

Para provar (2) observe que de (1) segue que

$\lambda \|x\| - \|Ax\| \leq \lambda Re < x, z_\lambda^* > - Re < Ax, z_\lambda^* > - \|Ax\|$

Agora basta provar que $- Re < Ax, z_\lambda^* > - \|Ax\| \leq 0$

Mas isso é verdadeiro já que $- Re < Ax, z_\lambda^* > \leq$

$\leq | < Ax, z_\lambda^* > | \leq \|Ax\| \cdot \underbrace{\|z_\lambda^*\|}_{=1} = \|Ax\|$.

Observe que $z_\lambda^* \in \overline{B}_1(0)$ em E^*. Como $\overline{B}_1(0)$ é compacto $\Rightarrow$ a família $\{z_\lambda^*\}_{\lambda > 0}$ possui o ponto limite $z^* \in E^*$ quando $\lambda \to \infty$. Temos:

$\|z^*\| \leq 1$, $Re < Ax, z^* > \leq 0$ e $Re < x, z^* > \geq \|x\|$.

Do outro lado, $Re < x, z^* > \leq | < x, z^* > | \leq \|x\| \Rightarrow$

$< x, z^* > = \|x\|$. Escolhendo $x^* = \|x\| z^*$, obtemos

$x^* \in F(x)$ e $Re < Ax, x^* > \leq 0$. Logo, $\forall x \in D(A)$ $\exists x^* \in D(A)$ tal que $Re < Ax, x^* > \leq 0$, portanto A é dissipativo.

<u>Teorema 1</u> (Lumer-Phillips) Seja A um operador com $\overline{D(A)} = E$. $\Rightarrow$

1) Se A for dissipativo e existir $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 - A) = E$ $\Rightarrow$ A é gerador infinitesimal do C_0-semigrupo das contrações.

2) Se A for gerador inf-l do C_0-semigrupo das contrações em E $\Rightarrow$ $R(\lambda - A) = E$ $\forall \lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, $\forall x \in D(A)$, $\forall x^* \in F(x)$

$Re < Ax, x^* > \leq 0$.

4

<u>Demonstração</u> 1) Seja $\lambda > 0 \Rightarrow$ por Lema 1,

$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in D(A)$. (3)

Como $R(\lambda_0 - A) = E$, o operador $(\lambda_0 I - A)^{-1} \in B(E)$ e portanto é fechado $\Rightarrow \lambda_0 - A$ é fechado e A é fechado.

Observe que basta provar que $R(\lambda - A) = E$ $\forall \lambda > 0$.

De fato, neste caso $(0, \infty) \subseteq \rho(A)$ e $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ e portanto por Teorema De Hille-Yosida, A é gerador do C_0-semigrupo das contrações.

Mostremos então que $R(\lambda - A) = E$ $\forall \lambda > 0$.

Consideremos $\Lambda = \{\lambda : 0 < \lambda < \infty, R(\lambda - A) = E\}$

Seja $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$. Como $\rho(A)$ é aberto, $\exists B_\varepsilon(\lambda) \subseteq \rho(A)$

$\Rightarrow (0, \infty) \cap B_\varepsilon(\lambda) \subseteq \Lambda \Rightarrow \Lambda$ é aberto.

Do outro lado, seja $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tal que $\lambda_n \to \tilde{\lambda} > 0. \Rightarrow$

$\forall y \in E$ $\exists x_n \in D(A)$ tal que $\lambda_n x_n - A x_n = y$ $\underset{(3)}{\Rightarrow}$

$\|x_n\| \leq \lambda_n^{-1} \|y\| \leq C$. Agora

$\lambda_m \|x_n - x_m\| \underset{(3)}{\leq} \|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| =$

$= \|\underbrace{-\lambda_m x_m + A x_m}_{-y} + \underbrace{\lambda_m x_n}_{(\lambda_m - \lambda_n + \lambda_n)} - A x_n\| = \|-y + y + (\lambda_m - \lambda_n) x_n\|$

$= |\lambda_m - \lambda_n| \|x_n\| \leq C |\lambda_m - \lambda_n| \Rightarrow \{x_n\}$ é de Cauchy

Seja $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, logo $\begin{cases} A x_n \to \tilde{\lambda} x - y \\ x_n \to x \end{cases}$ e

como A é fechado, $x \in D(A)$ e $Ax = \tilde{\lambda} x - y \Rightarrow$

$(\tilde{\lambda} - A)x = y \Rightarrow R(\lambda - A) = E \Rightarrow \tilde{\lambda} \in \Lambda \Rightarrow \Lambda$ é fechado em $(0, \infty)$. Como $\lambda_0 \in \Lambda \Rightarrow \Lambda \neq \emptyset \Rightarrow$ como conjunto aberto e fechado simultaneamente

$\Lambda = (0, \infty)$

2) Seja A gerador inf-l do C_0-semigrupo das contrações $T(t)$ $\Rightarrow$ por Teorema de Hille-Yosida $\rho(A) \supseteq (0,\infty)$ $\Rightarrow$ $R(\lambda - A) = E$ $\forall \lambda > 0$. Agora sejam (5)

$x \in D(A)$, $x^* \in F(x)$ $\Rightarrow$

$$|\langle T(t)x, x^* \rangle| \leq \|T(t)x\| \|x^*\| \leq \|x\|^2 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} \langle T(t)x - x, x^* \rangle = \operatorname{Re} \langle T(t)x, x^* \rangle - \|x\|^2 \leq 0 \quad (4)$$

Dividindo (4) por t e deixando $t \downarrow 0$ obtemos

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$$

Isso vale para $\forall x^* \in F(x)$.

Corolário Seja A com $\overline{D(A)} = E$. Se A e A^* são dissipativos $\Rightarrow$ A é gerador inf-l do C_0-semigrupo das contrações em E.

Demonstração Por Teorema 1,1) basta provar que $\forall x \in D(A)$, $\forall \lambda > 0$ $R(I - A) = E$. Temos $\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$ $\Rightarrow$ $R(\lambda - A)$ é fechado. De fato, seja $y_n = (\lambda - A)x_n$ tal que $y_n \to y$ $\Rightarrow$ $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\lambda} \|(\lambda - A)(x_n - x_m)\|$

$\Rightarrow$ $\{x_n\}$ é de Cauchy $\Rightarrow$ $\exists x = \lim x_n$.

Como A é fechado $x \in D(A)$ e $y = (\lambda - A)x$ $\Rightarrow$ $y \in R(\lambda - A)$.

Agora, suponha que $R(I - A) \neq E$ $\Rightarrow$ $\exists x^* \in E^*$, $x^* \neq 0$ tal que $\langle x - Ax, x^* \rangle = 0$ $\forall x \in D(A)$ (Já que $\overline{R(I-A)} \neq E$)
$\overline{R(I-A)} = R(I-A)$

$\Rightarrow$ $\langle x, x^* - A^* x^* \rangle = 0$ $\forall x \in D(A)$ $\Rightarrow$

$\langle x, x^* - A^* x^* \rangle = 0$, $\forall x \in E$ desde que $\overline{D(A)} = E$

$\Rightarrow$ $x^* - A^* x^* = 0$. Como A^* é dissipativo,

$\|(I-A^*)x^*\| \geq \|x^*\| \Rightarrow x^* = 0$ (contradição). 6

Proposição 1 Seja A dissipativo com $R(I-A)=E$. Se E for reflexivo, então $\overline{D(A)}=E$.

Demonstração Seja $x^* \in E^*$ tal que $\langle x, x^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$. Basta provar que $x^*=0$. Como $R(I-A)=E$, é suficiente provar que

$\langle x - Ax, x^* \rangle = 0 \quad \forall x \in D(A)$ (de fato $\langle x - Ax, x^* \rangle = 0 \Rightarrow x^* = 0$ já que $R(I-A)=E$)

ou seja provar que

$\langle Ax, x^* \rangle = 0, \ \forall x \in D(A)$

Pela demonstração do item 1) do Teor. 1 $R(\lambda - A) = E$ $\forall \lambda > 0$. $\Rightarrow \forall x \in D(A)$ $\exists \underset{\in D(A)}{x_n}$ tal que $x = x_n - \frac{1}{n} A x_n$.

Já que $Ax_n = n(x_n - x) \in D(A)$, $x_n \in D(A^2)$ e $Ax = Ax_n - \frac{1}{n} A^2 x_n$

$\Rightarrow Ax_n = (I - \frac{1}{n}A)^{-1} Ax$.

Pelo Lema 1, $\|(n - A)x\| \geq n\|x\| \Rightarrow \|(I - \frac{1}{n}A)x\| \geq \|x\|$

$\Rightarrow \|(I - \frac{1}{n}A)^{-1}\| \leq 1 \Rightarrow \|Ax_n\| \leq \|Ax\| \Rightarrow$

$\|x_n - x\| \leq \frac{1}{n}\|Ax_n\| \leq \frac{1}{n}\|Ax\| \Rightarrow x_n \to x$.

Usando $\|Ax_n\| \leq \|Ax\| = C$ e lembrando que $E = E^{**}$, concluímos que $\exists \{Ax_{n_k}\}$ tal que $Ax_{n_k} \xrightarrow{w} y$ (fraco).

Como A é fechado $\Rightarrow y = Ax$ (De fato, como $G(A) = \overline{G(A)}$ no sentido forte $\Rightarrow G(A)$ é fechado no sentido fraco).

Agora como $\langle z, x^* \rangle = 0 \quad \forall z \in D(A) \Rightarrow$

$\langle Ax_{n_k}, x^* \rangle = \langle \underset{\in D(A)}{n_k(x_{n_k} - x)}, x^* \rangle = 0 \underset{n_k \to \infty}{\Rightarrow} \langle Ax, x^* \rangle = 0$

$\forall x \in D(A) \Rightarrow x^* = 0 \Rightarrow \overline{D(A)} = E$.

Ex 2 a) Seja $E = C[0,1]$, $D(A) = \{u \in C^1[0,1] : u(0) = 0\}$ (7)

e $Au = -u'$ $\Rightarrow$ pode conferir que $\forall f \in E$ a equação $\lambda u - Au = f$ ou seja $\lambda u + u' = f$ possui a solução dada por $u(x) = \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)} f(\xi)\, d\xi$ $\Rightarrow$

para $\lambda > 0$ temos $\lambda |u(x)| = |\lambda \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)} f(\xi)\, d\xi| \le$

$\le \|f\| \cdot \lambda \int_0^x e^{\lambda(\xi - x)}\, d\xi = \|f\|(1 - e^{-\lambda x})$

Do outro lado, $\|\lambda u - Au\| = \|f\|$ $\Rightarrow$

$\lambda |u(x)| \le \|\lambda u - Au\| \Rightarrow \lambda \|u\| \le \|\lambda u - Au\|$ $\Rightarrow$

A é dissipativo por Lema 1.

Observe também que $\overline{D(A)} = \{u \in C[0,1] : u(0) = 0\} \ne E$

$\Rightarrow$ A não pode ser gerador inf.-l. do C_0-semigr. de contrações.

b). Seja $E = C_0(\mathbb{R})$, b e c são duas funções de valores reais de $C_b(\mathbb{R})$ e $Au = bu' + cu$, $D(A) = C_0^1(\mathbb{R})$.

Mostremos que o operador $A - \|c\| I$ é dissipativo, ou seja mostremos que $\forall u \in D(A)\ \exists \varphi \in F(u)$ tal que

$Re\langle Au - \|c\| u, \varphi\rangle \le 0$.

Seja $u \in D(A)$ $\Rightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|u(t_0)| = \|u\|$

$\Rightarrow \varphi : E \to \mathbb{C}$ agindo como $\varphi(g) = \langle g, \varphi\rangle = \overline{u(t_0)}\, g(t_0)$ pertence ao $F(u)$ (veja Ex 1 c)).

Temos $r := Re\langle Au - \|c\| u, \varphi\rangle =$

$= b(t_0) Re(u'(t_0)\overline{u}(t_0)) + \underbrace{(c(t_0) - \|c\|)}_{\le 0} \overbrace{Re(u(t_0)\overline{u}(t_0))}^{\ge 0} \le$

$\le b(t_0) Re(u'(t_0)\overline{u}(t_0))$. (5)

Consideremos $h(t) = Re(\bar{u}(t_0)u(t))$, $t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow h \in C_0^1(\mathbb{R})$ (8)
e $|u(t_0)|^2 = h(t_0) \leq \|h\| \leq |u(t_0)|\,\|u\| = |u(t_0)|^2 \Rightarrow$
$\max_{\mathbb{R}} h = h(t_0) \Rightarrow h'(t_0) = 0$ ou seja $Re(u'(t_0)\bar{u}(t_0)) = 0$
$\Rightarrow Re\langle Au - \|c\|u, \varphi\rangle \leq 0 \Rightarrow A - \|u\|$ é dissip.

c) Seja $E = C[0,1]$, b, c são funções de valores reais de $C[0,1]$ e $b(0) \geq 0$. Definimos $A_j = bu' + cu$ com $D(A_j) = \{u \in C^1[0,1] : u'(j) = 0\}$, $j \in \{0,1\}$ $\Rightarrow$

1) $A_1 - \|c\|I$ é dissipativo
2) Se $b(1) \leq 0 \Rightarrow A_0 - \|c\|I$ é dissipativo
3) Se $b(1) > 0 \Rightarrow A_0 - \omega I$ não é gerador do C_0-semigr. das contrações $\forall \omega \in \mathbb{R}$

<u>Demonstração</u> Analogamente ao ex. b) obtemos

$$Re\langle A_j u - \|c\|u, \varphi\rangle \underset{(5)}{\leq} b(t_0)\,Re(u'(t_0)\bar{u}(t_0)) = b(t_0)h'(t_0)$$

- Se $t_0 \in (0,1) \Rightarrow$ analogamente $Re\langle A_j u - \|c\|u, \varphi\rangle \leq 0$
- Se $t_0 = 0 \Rightarrow h'(0) = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(h(t) - h(0)) \leq 0$ desde que $h(0)$ é o maximo da h. Usando $b(0) \geq 0$, obtemos $Re\langle A_1 u - \|c\|u, \varphi\rangle \leq 0$ (o caso $t_0 = 1$ é óbvio já que $u'(1) = 0$)

$\Rightarrow$ 1)

Para provar 2) falta assumir que $t_0 = 1 \Rightarrow$ Para $b(1) \leq 0$ obtemos $Re\langle A_0 u - \|c\|u, \varphi\rangle \leq 0$
$h'(1) \geq 0$.
$\Rightarrow A_0 - \|c\|$ é dissipativo.

3) Escolhemos $u \in D(A_0)$ tal que $\max_{[0,1]} u = u(1) = 1$ (assume-se que ω está fixo)
e $u'(1) > (\omega - c(1))/b(1)$

$\Rightarrow Re\langle A_0 u - \omega u, \varphi\rangle \underset{(5)}{=} b(1)u'(1) + c(1) - \omega > 0$

$\Rightarrow A_0 - \omega I$ não é gerador do C_0-semigrupo das contrações. (veja T1, 2))

d) Seja $E = L^2(\mathbb{R})$, $Au = u'$, $D(A) = C_c^1(\mathbb{R})$

Seja $u \in D(A) \underset{\text{Ex 1. a)}}{\Rightarrow} F(u) = \{\varphi_u\}$, onde $\varphi_u(g) = (g, u)$

$2\,Re \langle Au, \varphi_u \rangle = (Au, u) + \overline{(Au, u)} = \int_{\mathbb{R}} u'\bar{u}\,dt + \int_{\mathbb{R}} \bar{u}' u\,dt = 0$

$\Rightarrow$ A é dissipativo (mesmo como $-A$)

e) $E = L^2(0,1)$, $A_j u = u'$, $D(A_j) = \{u \in C^1[0,1] : u(j) = 0\}$, $j \in \{0,1\}$. Seja $u \in D(A_j) \Rightarrow F(u) = \{\varphi_u\} \Rightarrow$

$2\,Re \langle A_j u, \varphi_u \rangle = \int_0^1 u'\bar{u}\,dt + \int_0^1 \bar{u}' u\,dt = |u(1)|^2 - |u(0)|^2$

Se $u(1) = 0 \Rightarrow Re \langle A_1 u, \varphi_u \rangle \leq 0 \Rightarrow A_1$ é dissipativo

Mostremos que $A_0 - \omega I$ não é dissipativo $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$

De fato seja $u \in D(A)$ tal que $|u(1)|^2 > 2\omega \|u\|_2^2$ (observe que tal escolha é sempre possível) $\Rightarrow Re \langle A_0 u - \omega u, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2}|u(1)|^2 - \omega\|u\|_2^2 > 0$

Como $F(u) = \{\varphi_u\} \Rightarrow A_0 - \omega I$ não é dissipativo pela definição.